

*Skrivtid: 15.00 – 20.00. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon och bifogade formler. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng. Påbörja varje uppgift på nytt papper och skriv endast på papperets ena sida. Lös ej problem 1 (2, 3) om du klarat dugga 1 (2, 3).*

1. För funktionen  $f$  gäller att  $f(x) = x - 1$  då  $|x| > 2$ , medan  $f(x) = ax^2 + bx + c$  då  $|x| \leq 2$ . Bestäm  $a, b, c$  så att  $f$  blir kontinuerlig och  $f(0) = \frac{5}{3}$ .
2. (i) Låt  $f(x) = \sqrt{x}$ . Beräkna, utgående från derivatans definition, derivatan  $f'(x)$  av denna funktion. (INGA deriveringsregler får alltså användas).  
(ii) Bevisa att  $\ln x < x - 1$ , då  $x > 1$ .
3. (i) Visa att funktionen  $f(x) = x - e^{1-x}$ ,  $-\infty < x < \infty$ , är inverterbar.  
(ii) Beräkna  $(f^{-1})'(0)$ .

4. Beräkna integralerna

$$(a) \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} \qquad (b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x (\cos x + \sin x) dx$$

5. Lös differentialekvationen  $2xy' + y = \sqrt{x}e^x$ ,  $x > 0$ . Bestäm särskilt den lösning för vilken  $y(1) = e$ .
6. Skissera kurvan  $y = \frac{x^3 + 9x^2}{x^2 - 1}$  i dess huvuddrag, med angivande av eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.
7. Avgör, med tydliga motiveringar, om serien konvergerar eller divergerar:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}, \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

8. Kurvan  $y = f(x)$ ,  $x > 0$ , ligger i första kvadranten och har egenskapen att normalen till kurvan i en godtycklig punkt  $(a, f(a))$  skär  $y$ -axeln i punkten  $(0, 2f(a))$ . Dessutom gäller att  $f(1) = 2$ . Bestäm  $f(x)$ .

(Formelblad på baksidan)

## Svar till tentamen i Endimensionell analys 2006–12–11

1.  $a = -\frac{2}{3}$ ,  $b = 1$ ,  $c = \frac{5}{3}$ .

3. (i) Då  $f'(x) = 1 + e^{1-x} > 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ , följer att  $f(x)$  är strängt växande och därmed inverterbar.

(ii) Då  $f(1) = 0$  får vi

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

4. (a)  $4 - 2 \ln 3$ , (b)  $\sqrt{2} - 1$ .

5.  $y = \frac{C + e^x}{2\sqrt{x}}$  respektive  $y = \frac{e + e^x}{2\sqrt{x}}$ .

6. Lodräta asymptoter  $x = \pm 1$ .  $y = x + 9$  är (sned) asymptot i både  $+\infty$  och  $-\infty$ . Strikt lokalt maximum ( $y = 0$ ) i  $x = 0$ . Strikt lokalt minimum ( $y = 27/2$ ) i  $x = 3$ .

7. (a) Divergent. (b) Konvergent.

8.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ .